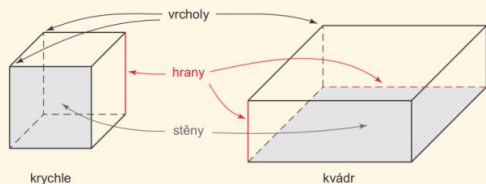


HRANOLY – POVRCH A OBJEM - 1. díl

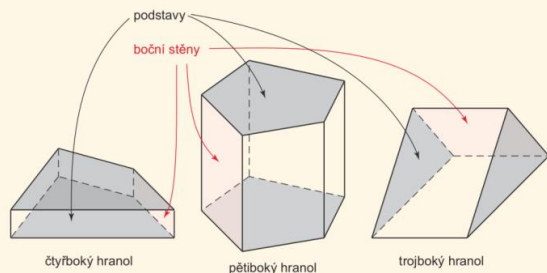
ODKAZY NA VIDEO: <https://www.youtube.com/watch?v=hl0-0rMw654>
<https://www.youtube.com/watch?v=Lan5illGmv8>
<https://www.youtube.com/watch?v=9U520PB7Xs0>

Za nejjednodušší tělesa můžeme považovat **krychle** a **kvádr**.



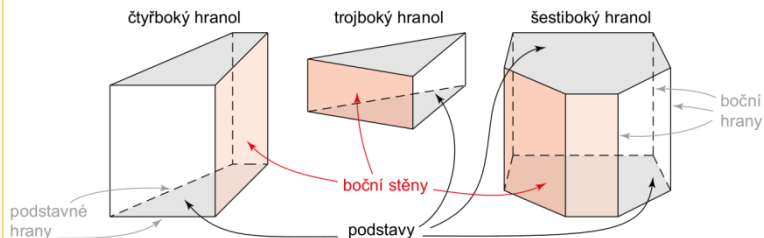
Stěny krychle a kvádra jsou obdélníky, popř. čtverce. Jejich vrcholy nazýváme **vrcholy** tělesa, jejich strany pak nazýváme **hrany** tělesa.

Na dalším obrázku jsou nakresleny tři **hranoly**. Jejich dvě stěny jsou shodné (stejně) mnohoúhelníky.



S tělesem, které nazýváme **hranol**, jsme se setkali již v učebnici *Základy geometrie*. Víme, že jde o těleso, které má dvě shodné **podstavy** (stěny tvaru mnohoúhelníku) a všechny **boční hrany** rovnoběžné a stejně dlouhé. Jsou-li boční hrany kolmé k podstavám, mají **boční stěny** tvar obdélníku nebo čtverce – takovým hranolům říkáme **kolmé hranoly**.

Na následujících obrázcích jsou některé podstavy, boční stěny a boční hrany nakreslených hranolů označeny:



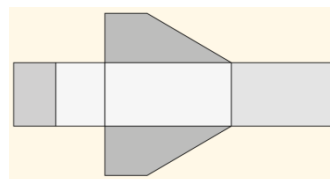
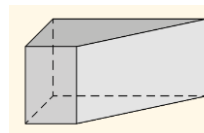
Stěnám ve tvaru mnohoúhelníku říkáme **podstavy**, ostatní stěny nazýváme **boční stěny** hranolu.

Zvláštními případy hranolu jsou už zmíněné kvádr a krychle – jejich podstavy tvoří obdélník, popř. čtverec.

SÍŤ HRANOLU:

Útvar, ze kterého je možné těleso „poskládat“, nazýváme **síť tělesa**. Síť kolmého hranolu je sestavena ze dvou mnohoúhelníků, které tvoří podstavy, a obdélníků (čtverců), které tvoří boční stěny. U hranolů navíc požadujeme, aby se síť po vystřížení „nerozpadla“ – každý mnohoúhelník musí mít s některým dalším společnou stranu.

Síť hranolu na obrázku je sestavena z geometrických útvarů (čtyři obdélníky a dvou lichoběžníků), které tvoří všechny stěny hranolu. Když budeme určovat **povrch hranolu** (např. k určení spotřeby barvy pro jeho obarvení), můžeme ji použít. Protože je síť sestavena z těchto mnohoúhelníků jako hranol, potřebujeme k obarvení hranolu stejné množství barvy jako k obarvení jeho sítě. Pro určení obsahu sítě, a tedy i povrchu hranolu tak stačí sečíst obsahy jednotlivých stěn hranolu.

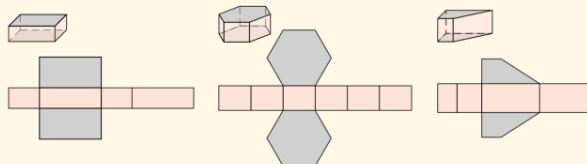


POVRCH HRANOLU:

Povrch hranolu je obsah plochy, kterou zaujímá jeho síť.

Povrch hranolu vypočítáme jako součet obsahů jednotlivých stěn hranolu.

Jak jsme již uvedli, pro výpočet povrchu hranolu stačí sečíst obsahy jeho stěn. Někdy není třeba počítat obsah každé stěny zvlášť a je možné výpočet zjednodušit. Podívejme se znovu na obrázky sítě hranolů, které jsme již nakreslili:



Ačkoli je možné pro každé těleso sestavit více sítí, naše sítě jsou všechny sestaveny podle téhož principu: boční stěny jsou zakresleny tak, že k sobě přiléhají bočními hranami a k jedné z bočních stěn pak přiléhají podstavy.

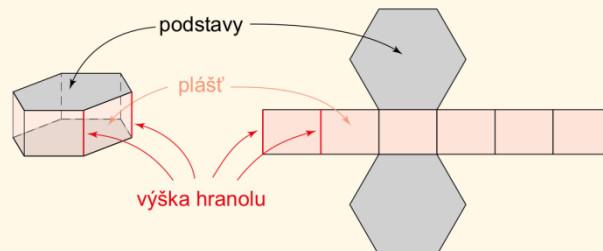
„Řada“ bočních stěn pak tvoří obdélník, který „omotáme“ kolem podstav. Tento obdélník je na obrázku vyznačen barevně a nazýváme jej **plášť** hranolu. Pro povrch hranolu S pak můžeme sestavit vztah:

$$S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$$

S_p označuje obsah podstavy a S_{pl} označuje obsah pláště hranolu.

Protože je plášť hranolu obdélník, můžeme jeho obsah vyjádřit pomocí délek jeho stran. Jedna ze stran má délku jako boční hrana hranolu a druhá, protože plášť kolem podstav „omotáme“, se rovná obvodu podstavy. Označíme-li v_h výšku hranolu a o_p obvod podstavy hranolu, vypočítáme obsah pláště $S_{pl} = v_h \cdot o_p$.

Boční hraně hranolu také říkáme **výška hranolu** – jde o vzdálenost podstav.



Vztah pro výpočet **povrchu hranolu** tak můžeme zapsat:

$$S = 2 \cdot S_p + v_h \cdot o_p$$



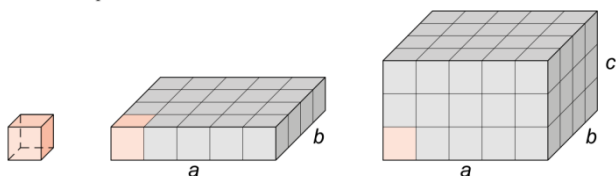
Povrch hranolu můžeme vypočítat pomocí vztahu $S = 2 \cdot S_p + S_{pl}$, kde S_p je obsah podstavy hranolu a S_{pl} je obsah jeho pláště.

Vzorec můžeme zapsat i ve tvaru: $S = 2 \cdot S_p + v_h \cdot o_p$, kde v_h je výška hranolu a o_p je obvod podstavy.



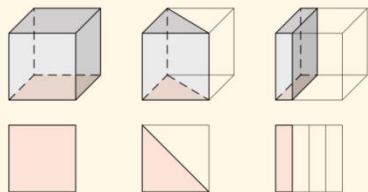
OBJEM HRANOLU:

Představme si, že máme krabici plnou krychliček a sestavujeme z nich kvádry. Kolik krychlí budeme potřebovat?

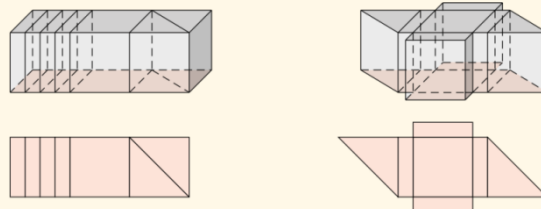


Budeme-li mít jen jednu vrstvu, bude potřeba pouze $a \cdot b$ krychlí, v našem případě tedy $5 \cdot 4 = 20$ krychlí. Je-li vrstev více, bude potřeba tolikrát víc krychlí, kolik vrstev stavba obsahuje. Potřebujeme tedy $a \cdot b \cdot c$ krychlí, v našem případě tedy $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ krychlí.

V dětské dřevěné stavebnici můžeme najít dílky, které jsou nakresleny na obrázku. První z nich je krychle, další dva vznikly odříznutím z této krychle. Každý z dílků má tvar hranolu, výšky hranolů se sobě rovnají, podstavy jsou zakresleny zvlášť pod jednotlivými hranoly.



Z několika takových dílků můžeme sestavit např. kvádr nebo i jinou stavbu:



Stavba na druhém obrázku je dvanáctiboký hranol. Na stavbu tohoto hranolu jsme použili tytéž dílky jako pro stavbu kvádra, obě tělesa tedy musí mít tentýž objem. Z obrázků je navíc patrné, že i obsahy jejich podstav se sobě rovnají, a víme, že i jejich výšky jsou shodné. Co tato skutečnost znamená?

Objem V kvádra můžeme vypočítat $V = S_p \cdot v$. Náš dvanáctiboký hranol má podstavu téhož obsahu jako kvádr, shodnou výšku i tentýž objem. I pro hranol tedy musí platit, že se jeho objem rovná součinu obsahu podstavy a výšky.

Pro **objem** jakéhokoli **hranolu** platí, že $V = S_p \cdot v$.



Objem libovolného hranolu vypočítáme pomocí vzorce $V = S_p \cdot v$, kde S_p je obsah podstavy hranolu a v je výška hranolu.



DŮLEŽITÉ:

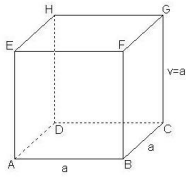
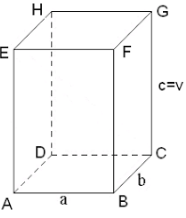
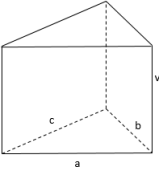
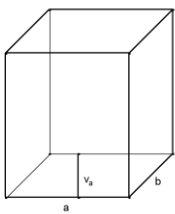
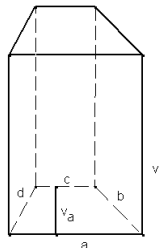
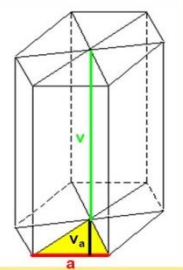
Jde-li o **pravidelný trojboký** hranol, podstavou je **rovnostranný trojúhelník**.

Jde-li o **pravidelný čtyřboký** hranol, podstavou je **čtverec** nebo **kosočtverec**.

Jde-li o **pravidelný pětiboký, šestiboký, ...** hranol, podstavou je pravidelný **pětiúhelník, šestiúhelník, ...**

Plášť těchto pravidelných hranolů je složen ze stejných obdélníků (případně čtverců)

TYPY HRANOLŮ:

Tvar podstavy		Obsah podstavy	Objem	Povrch
Čtverec		$S_p = a \cdot a$	$V = a \cdot a \cdot a$	$S = 6 \cdot a \cdot a$
Obdélník		$S_p = a \cdot b$	$V = a \cdot b \cdot c$	$S = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$
Trojúhelník		$S_p = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$	$V = \frac{a \cdot v_a}{2} \cdot v_h$	$S = a \cdot v_h + b \cdot v_h + c \cdot v_h$
Rovnoběžník		$S_p = a \cdot v_a = b \cdot v_b$	$V = a \cdot v_a \cdot v_h$	$S = 2 \cdot a \cdot v_h + 2 \cdot b \cdot v_h$
Lichoběžník		$S_p = \frac{(a+c) \cdot v}{2}$	$V = \frac{(a+c) \cdot v}{2} \cdot v_h$	$S = a \cdot v_h + b \cdot v_h + c \cdot v_h + d \cdot v_h$
Šestiúhelník		$S_p = 6 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2}$	$V = 6 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} \cdot v_h$	$S = 2 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2} + 6 \cdot a \cdot v_h$